Методические рекомендации

для выполнения практических работ

по дисциплине ЕН.01 Математика

по специальности

Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта

Преподаватель:

Огнева Т.В.

г. Шуя 2015 г

Содержание

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в печатном или электронном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

Практическая работа №1

Тема: Функции одной переменной и их свойства.

Цель: сформировать умение использовать свойства функции для ее исследования, решать задачи и упражнения по данной теме.

Теоретические сведения к практической работе

Если каждому элементу x из множества X по некоторому правилу f поставлен в соответствие элемент y множестваY, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в множестве Y, и записывают y=f(x).

Множество X называется областью определения функции D(f), а множество Y – областью значений функции E(f).

Пример 1. Найти область определения функции

$$1)\,y=\frac{15}{x+6}$$

$$x+6\neq 0$$

$$x\neq -6$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;-6)\cup(-6;\infty)$$

$$2)\,y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}$$

$$y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}=\frac{x+13}{(x-3)(x-4)}$$

$$x-3\neq 0 \quad x-4\neq 0$$

$$x\neq 3 \quad x\neq 4$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;3)\cup(3;4)\cup(4;\infty)$$

$$3)\,y=\sqrt{x^2-81}$$

$$x^2-81\geq 0$$

$$(x-9)(x+9)\geq 0$$

$$D(\mathrm{y})=(-\infty;-9]\cup[9;\infty)$$

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.

Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

$1)\, y = x^2 + 6$

$y(-\mathrm{x}) = (-x)^2 + 6 = x^2 + 6 = y(\mathrm{x})$

$\Rightarrow$ *функция четная*

$2)\, y = \sin x + 2x$

$y(-x) = \sin(-x) + 2(-x) = -\sin x - 2x = -(\sin x + 2x) = -y(\mathrm{x})$

$\Rightarrow$ *функция нечетная*

$3)\ \mathrm{y} = \dfrac{x+2}{x^2-16}$

$\mathrm{y}(-x) = \dfrac{(-x)+2}{(-x)^2-16} = \dfrac{-x+2}{x^2-16}$

$\Rightarrow$ *функция общего вида*

2. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.

3. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(\mathrm{x})| \le M$ для любого $x \in X$.

4. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое потребители готовы купить по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция спроса, и пишут q=f(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $f(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

График функции спроса называют кривой спроса.

Пример 3. Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 60 - \sqrt{100 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции

- Функцию цены в виде $p = f^{-1}(q)$
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 300; p_2 = 800$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 15$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Решение: 1) Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} p \ge 0 \\ 100 + p \ge 0 \\ 60 - \sqrt{100 + p} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ \sqrt{100 + p} \le 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ 100 + p \le 3600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \ge 0 \\ p \ge -100 \\ p \le 3500 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 \le p \le 3500$$

$$\mathrm{D}(f) = [0; 3500]$$

Выразим значение p через q:

$$\sqrt{100 + p} = 60 - q$$
$$100 + p = (60 - q)^2$$
$$100 + p = 3600 - 120q + q^2$$
$$p = q^2 - 120q + 3500$$
$$p \ge 0, \quad q^2 - 120q + 3500 \ge 0$$
$$q \in (-\infty; 50] \cup [70; \infty)$$
$$q \ge 0, \quad q \in [0; 50] \cup [70; \infty)$$

Из закона спроса следует, что с увеличением цены p от нуля до 3500 руб. спрос должен падать. В нашем случае функция q убывает в промежутке $q \in [0; 50]$, следовательно, множество значений функции $E(f) \in [0; 50]$.

1) Функция цены имеет вид $p = q^2 - 120q + 3500$

2) $$p_1 = 300 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 300} = 60 - 20 = 40 \quad (\textit{тыс.шт.});$$
$$p_2 = 800 \Rightarrow q_1 = 60 - \sqrt{100 + 800} = 60 - 30 = 30 \quad (\textit{тыс.шт.});$$

3) $$q_1 = 10 \Rightarrow p_1 = 100 - 120 \cdot 10 + 3500 = 2400 \quad (\textit{руб.});$$
$$q_2 = 15 \Rightarrow p_2 = 225 - 120 \cdot 15 + 3500 = 1925 \quad (\textit{руб.}).$$

4) Выручка от продажи составляет $u = pq$, следовательно,

$$u_1 = p_1 \cdot q_1 = 2400 \cdot 10 = 24000 (\text{руб.})$$
$$u_2 = p_2 \cdot q_2 = 1925 \cdot 15 = 28875 (\text{руб.})$$

Если каждому значению цены p за единицу товара поставлено в соответствие число q – количество товара, которое производители готовы продать по данной цене за определенный промежуток времени, то говорят, что задана функция предложения, и пишут q=φ(p).

Эта функция определена для тех значений $p \ge 0$, для которых $\varphi(p) \ge 0$ и множество ее значений $q \ge 0$.

Пример 4. Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{9}(p-2)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 11; p_2 = 20$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}(q)$

Решение: 1) Найдем область определения:

$$\frac{1}{9}(p-2)^2 - 1 \ge 0$$
$$(p-2)^2 - 9 \ge 0$$
$$(p-2-3)(p-2+3) \ge 0$$
$$(p-5)(p+1) \ge 0$$
$$p \in (-\infty; -1] \cup [5; \infty)$$
$$Т.к.\ p \ge 0 \Rightarrow \quad p \in [5; \infty)$$

Множество значений функции q при $p \ge 5$ будет $q \in [0; +\infty)$.

1) При
$$p_1 = 11; q_1 = \frac{1}{9}(11-2)^2 - 1 = 9 - 1 = 8(\textit{тыс.шт.})$$
$$p_2 = 20; q_2 = \frac{1}{9}(20-2)^2 - 1 = 36 - 1 = 35(\textit{тыс.шт.})$$

2) Найдем функцию $p = \varphi^{-1}(q)$

$$q=\frac{1}{9}(\text{p}-2)^2-1$$

$$\frac{1}{9}(\text{p}-2)^2=q+1$$

$$(\text{p}-2)^2=9(q+1)$$

$$p-2=\pm\sqrt{9(q+1)}$$

$$p-2=\pm3\sqrt{(q+1)}$$

$$p=2+3\sqrt{(q+1)} \quad p=2-3\sqrt{(q+1)}$$

$$\text{Т}.к.\ p\ge5, \quad p=2+3\sqrt{(q+1)}$$

Содержание практической работы:

Задание 1. Найти область определения функции

$$1)\, y=\frac{32+x}{(x-4)(x+9)}$$

$$2)\, y=\frac{29-x}{x^2+15x}$$

$$3)\, y=\frac{4x}{x^2-5x+6}$$

$$4)\, y=\sqrt{x^2-100}$$

$$5)\ \text{y}=\log_6(\text{x}-3)$$

$$6)\, y=\frac{\sqrt{x+2}}{(x-3)(x+1)}$$

Задание 2. Установить четность или нечетность функции.

$$1)\, y=x^4-x^2+3$$

$$2)\, y=\frac{x^5+9}{x}$$

$$3)\, y=-\sin x-4x$$

$$4)\, y=e^x+12$$

$$5)\ \text{y}=\frac{x^2+2}{x^2-16}\cdot\cos x$$

$$6)\ \text{y}=\text{tgx}-2\,\text{x}$$

Задание 3. а) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q=70-\sqrt{250+p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции

- Функцию цены в виде $p = f^{-1}$(q)
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 150; p_2 = 650$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 15; q_2 = 20$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

б) Функция спроса на некоторый товар имеет вид $q = 40 - \sqrt{50 + p}$, где q – количество товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений этой функции
- Функцию цены в виде $p = f^{-1}$(q)
- Объем спроса при ценах на товар: $p_1 = 175; p_2 = 350$
- Цену за единицу товара, если $q_1 = 10; q_2 = 30$,
- Выручку продавцов в каждом из этих случаев.

Задание 4. а) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{4}(\text{p} - 3)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 7; p_2 = 11$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}$(q)

б) Функция предложения некоторого товара на рынке имеет вид $q = \frac{1}{16}(\text{p} - 5)^2 - 1$, где q – количество предлагаемого товара (тыс. шт.); p – цена единицы товара (руб.). Требуется найти:

- Область определения и множество значений функции q
- Объем предложения при ценах за единицу товара: $p_1 = 37; p_2 = 53$
- Зависимость цены за единицу товара от объема спроса, т.е. функцию $p = \varphi^{-1}$(q)

Практическая работа №2

Тема: Предел последовательности и предел функции.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть существует последовательность действительных чисел $\{a_n \in R : n \geq 1\}$.

Число а называется пределом последовательности

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$$
$$\forall n > n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2}$

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 6n - 5}{10n^3 - 8n^2 + 2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(1 + \dfrac{6}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(10 - \dfrac{8}{n} + \dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{10}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1}$$

Пример 2. Вычислить предел

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n + 3}{12n^3 + 4n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(12 + \dfrac{4}{n} - \dfrac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{0}{12} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 6}{7n - 8}$$

Пример 3. Вычислить предел

Решение $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 + 6}{7n - 8} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1 + \dfrac{6}{n^2})}{n^2(\dfrac{7}{n} - \dfrac{8}{n^2})} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+8} - \sqrt{n-1}\right)$

Решение

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2n+8}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{2n+8}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+8)-(n-1)}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+8-n+1}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{\left(\sqrt{2n+8}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{9}{n}\right)}{n\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{9}{n}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}=\frac{1}{0}=\infty$$

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если x=x_0 принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x = x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c} \to 0; \quad \frac{c}{0} \to \infty; \quad \frac{\infty}{c} \to \infty; \; c \cdot \infty \to \infty; \; c \cdot 0 \to 0; \; a^{\infty} \to 0, \text{если}\ 0 < a < 1; \; a^{\infty} \to \infty, \text{если}\ a > 1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right); \; \left(\frac{0}{0}\right); \; (0 \cdot \infty); \; (\infty - \infty); \; (1^{\infty}); \; (\infty^{0}); \; (0^{0}).$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4}$

Решение $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3 + 15}{10x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2 \cdot 1^3 + 15}{10 \cdot 1^2 - 4} = \frac{2 + 15}{10 - 4} = \frac{17}{6}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4}$

Решение $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 5x + 4} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim\limits_{x \to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(x+4)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(4+4)}{(4-1)} = \frac{8}{3}$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}}{x-5} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 5} \frac{\left(\sqrt{2x+8} - \sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2 - \left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{\left((2x+8) - (23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} = \lim_{x \to 5} \frac{3}{\left(\sqrt{2x+8} + \sqrt{23-x}\right)} =$$

$$= \frac{3}{\left(\sqrt{2 \cdot 5 + 8} + \sqrt{23-5}\right)} = \frac{3}{\left(\sqrt{18} + \sqrt{18}\right)} = \frac{3}{2\sqrt{18}} = \frac{3}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5} \qquad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6} \qquad 3)\lim_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$$

$$4)\lim_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n} \qquad 5)\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2} \qquad 6)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$$

$$7)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2} \qquad 8)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n} \qquad 9)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x} \qquad 2)\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x} \qquad 3)\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2} \qquad 5)\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \qquad 6)\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2} \qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x} \qquad 9)\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Практическая работа №3

Тема: Замечательные пределы.

Цель: сформировать умение использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^{x}=e \text{ или } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+\mathrm{x})}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$$

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\dfrac{5\cdot 8}{6}=\dfrac{40}{6}=\dfrac{20}{3}$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}} \overset{[1^\infty]}{=} \lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)} = e^{\frac{5}{3}}$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x \overset{[1^\infty]}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Задание: Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$1)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}$ $\quad 2)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$ $\quad 3)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

$4)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}$ $\quad 5)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$ $\quad 6)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 4x}$

$7)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tgx}$ $\quad 8)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}$ $\quad 9)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$

Практическая работа №4

Тема: Непрерывность функции, точки разрыва.

Цель: сформировать умение исследовать функцию на непрерывность и наличие точек разрыва, определять род точек разрыва.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция называется непрерывной, если:

1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f = 0 \quad \Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

2) $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) = f(x_0)$

Функция называется непрерывной на некотором промежутке X, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Пример 1: Доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ непрерывна на (-∞;+∞)

Решение:

$$\Delta f = \left(3\left(x_0+\Delta x\right)^2 - 2\left(x_0+\Delta x\right) + 1\right) - \left(3x_0^{\,2} - 2x_0 + 1\right) = 3x_0^{\,2} + 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2x_0 - 2\Delta x + 1 - 3x_0^{\,2} + 2x_0 - 1 =$$

$$= 6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0}\left(6x_0\Delta x + 3\Delta x^2 - 2\Delta x\right) = 0$$

Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Классификация точек разрыва:

1) x_0 – точка устранимого разрыва, если а) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$

   б) в точке x_0 функция не определена

2) x_0 – точка разрыва I рода, если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

   $h = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ - скачок функции

3) x_0 – точка разрыва II рода, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности или не существует

Пример 2:

Найти точки разрыва функции и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y}=f(\mathrm{x})=\begin{cases} x^2+1, x<1 \\ 0, x=1 \\ x+1, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1+0}\left(x+1\right)=2$$

$$f(1)=0$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{устранимого} \quad \textit{разрыва}$$

$$б)\ \mathrm{y}=f(\mathrm{x})=\begin{cases} x^2, x\le 1 \\ x-2, x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} x^2=1\ne \lim_{x\to 1+0}\left(x-2\right)=-1$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad I \quad \textit{рода}$$

$$h=-1-1=-2$$

$$в)\ y=2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\infty}=\infty$$

$$\Rightarrow x_0=1 \quad \textit{точка} \quad \textit{разрыва} \quad II \quad \textit{рода}$$

Содержание практической работы

Задание 1. Доказать, что функция является непрерывной

$a)\ f(\mathrm{x})=x+9$

$б)\ f(\mathrm{x})=\mathrm{x}^3+8$

$в)\ f(\mathrm{x})=2\,\mathrm{x}^2+6x-5$

$г)\ f(\mathrm{x})=10\,\mathrm{x}^2-12x$

Задание 2. Найти точки разрыва и установить их тип

$$a)\ \mathrm{y}=f(\mathrm{x})=\begin{cases} -e^{-x}, x<0 \\ 0, x=0 \\ e^{x}, x>0 \end{cases}$$

$$б)\ \mathrm{y}=f(\mathrm{x})=\frac{\sin x}{x}$$

$$в)\ y=f(\mathrm{x})=e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$г)\ \mathrm{y}=f(\mathrm{x})=\frac{\cos x}{x}$$

Практическая работа №5

Тема: Производная функции.

Цель: сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$$f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \left.y'_x\right|_{x_0}, \quad y'(x_0) \text{ и другие.}$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		

IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}, \ (v(x) \neq 0)$		**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}, \ (y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c\cdot v'}{v^2}, \quad c = \text{const} \quad (v(x) \neq 0)$			

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u} \quad (u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Пример 1. Найти производные функций:

а) $y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{4}{x^3}$; *б*) $s = (e^t - 2\ln t)\sin t$; *в*) $u = \text{ctg}^3 \dfrac{v}{3}$; *г*) $z = \dfrac{\text{arctg} 2t}{1+4t^2}$.

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:□

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1;□ используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$
$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:□

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Найти производную y'_x, если функция задана параметрически: $\begin{cases} x = \ln(5-2t) \\ y = \operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$

Используем правило VII $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \cdot \ln x$$
$$\left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)'$$
$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$
$$y' = y\left(\ln x + 1\right)$$
$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) *а*) $y = 3x^3 - \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; *б*) $s = (1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg} t)$; *в*) $u = \ln^3 \dfrac{V}{2}$; *г*) $z = \dfrac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) *а*) $y = 5x - \dfrac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; *б*) $s = (4-3\ln t)(5+2\sin t)$; *в*) $u = \sin^4(2V+3)$; *г*) $z = \dfrac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

3) $a)\ y=7x^2+\dfrac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; $\quad б)\ s=(3-\cos t)(5+6\sin t)$; $в)\ u=\sqrt[3]{1-4V^2}$; $г)\ z=\dfrac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $a)\ y=5x^2+\dfrac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$; $б)\ s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; $в)\ u=\ln^2(5V-3)$; $г)\ z=\dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) $a)\ y=x^5-\dfrac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5}$; $б)\ s=t^4(4+\mathrm{arctg}\,t)$; $в)\ u=\cos^3(3V+1)$; $г)\ z=\dfrac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) $a)\ y=x^4+\dfrac{1}{x}-2\sqrt[3]{x}$; $\quad б)\ s=(3+\mathrm{tg}\,t)(1-4\mathrm{ctg}\,t)$; $в)\ u=tg^4(3V+2)$; $г)\ z=\dfrac{\mathrm{arctg}\,2t}{1+4t^2}$.

Задание 2. Найти производную y'_x функции y=y(x), заданной параметрически: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x=\cos(2t+6) \\ y=\sin(2t+6) \end{cases}$

3) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\,t \\ y=t^2-8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=e^{4t} \\ y=(1-4t)^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x=c\mathrm{tg}\,t \\ y=t^2+1 \end{cases}$

Задание 3. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием: 1) $y=(\sin x)^{\cos x}$

2) $y=(\cos x)^x$

3) $y=x^{\ln x}$

4) $y=(\sin x)^{\ln x}$

5) $y=x^{\cos x}$

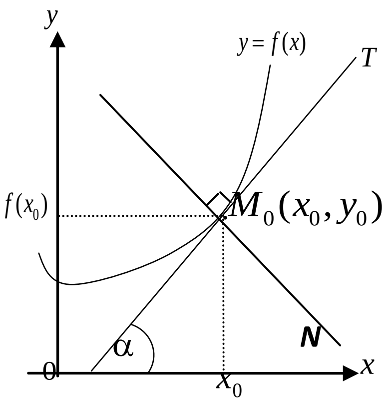
6) $y=(tgx)^{\ln x}$

Практическая работа №6

Тема: Геометрический смысл производной.

Цель: сформировать умение составлять уравнение касательной и нормали к графику функций, знать геометрический смысл производной.

Теоретические сведения к практической работе



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad (1)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (2)$$

Пример: Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (1) и нормали (2):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2 - 3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}}(x^2 - 3)' = \frac{1}{2}(x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x - 2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2), \text{ или } x + 2y - 4 = 0 \text{ — уравнение нормали.}$$

Содержание практической работы

Задание: Составить уравнение касательной и нормали к кривой *y*=*f*(*x*) в точке с абсциссой x_0.

1) $\frac{x^2-3}{x}$, $x_0 = 1$.

2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0 = 2$.

3) $\frac{x^2+3x}{3}$, $x_0 = -1$.

4) $\sqrt{x} + 2x$, $x_0 = 9$.

5) $\frac{x^2}{x-2}$, $x_0 = 1$.

6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0 = 1$.

Практическая работа № 7

Тема: Производная высших порядков.

Цель: сформировать умение находить производные высших порядков.

Теоретические сведения к практической работе

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример: Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Содержание практической работы

Задание. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$

2) $y = \cos x - \ln x$

3) $y = \sin x + x^4$

4) $y = x^2 + \sin x$

5) $y = x + \ln x$

6) $y = 3e^x + 2x$

Практическая работа № 8

Тема: Дифференциал функции.

Цель: сформировать умение находить дифференциала функции.

Теоретические сведения к практической работе

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Пример 1. Найти дифференциалы функций:

$a)\ y = x + \cos 2x;\ б)\ u = 3 + e^{-x};\ в)\ s = \ln 3t.$

Решение.

$a)\ dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

$б)\ du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

$в)\ ds = (\ln 3t)'dt = \frac{(3t)'}{3t}dt = \frac{3}{3t}dt = \frac{1}{t}dt.$

Содержание практической работы

Задание: Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5;$

2) $y = \ln x - x^3;$

3) $y = 4 + 8\sin x;$

4) $y = 2x - 1.$

5) $y = 1 - \cos x;$

6) $y = 10 - 3x^2$

Практическая работа №9

Тема: Правило Лопиталя.

Цель: сформировать умение применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Теоретические сведения к практической работе

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример: Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6};\quad б)\ \lim_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14};$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо *x* предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

Содержание практической работы

Задание: Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to4}\frac{16-x^2}{x^2-5x+4}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg}x}$.

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to1/3}\frac{6x^2-5x+1}{1-3x}$;

5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$.

6) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$

Практическая работа №10

Тема: Неопределенный интеграл.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя непосредственное интегрирования и метод замены переменной.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C,$ где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C,$ где $F'(x)=f(x), C$ — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x);\quad d\int f(x)dx=f(x)dx;$

2. $\int dF(x)=F(x)+C;$

3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx,\qquad k$ — const;

4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du=C;\quad C=\text{const};$

2. $\int du=u+C;$

3. $\int u^{\alpha}du=\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1;$

3а. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C;$

4. $\int\dfrac{du}{u}=\ln|u|+C;$

5. $\int a^{u}du=\dfrac{a^{u}}{\ln a}+C;$

6. $\int e^{u}du=e^{u}+C;$

7. $\int\cos u\,du=\sin u+C;$

8. $\int\sin u\,du=-\cos u+C;$

9. $\int\dfrac{du}{\cos^{2}u}=\operatorname{tg}u+C;$

10. $\int\dfrac{du}{\sin^{2}u}=-\operatorname{ctg}u+C;$

11. $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+C;$

12. $\int\dfrac{du}{\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left|u+\sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right|+C;$

13. $\int\dfrac{du}{u^{2}+a^{2}}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a}+C;$

14. $\int\dfrac{du}{u^{2}-a^{2}}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right|+C;$

15. $\int\dfrac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right|+C;$

16. $\int\dfrac{du}{\cos u}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C;$

17. $\int\operatorname{tg}u\,du=-\ln|\cos u|+C;$

18. $\int\operatorname{ctg}u\,du=\ln|\sin u|+C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$a)\int\left(\dfrac{5}{\sqrt{x^{2}+7}}-\dfrac{3x^{3}+1}{x^{4}}+2\sqrt[6]{x^{5}}\right)dx;\qquad$ б) $\int\left(\dfrac{5}{11x^{2}+2}+3\cdot5^{x}+\dfrac{16-x^{2}}{4+x}\right)dx.$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3(\ln|x|)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int5^xdx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^xdx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{array}{l}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\quad\text{— верно.}$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int \cos 4x dx;\ \ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ \ в)\int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

Содержание практической работы

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\dfrac{7}{x^2+16} - \dfrac{x^4+5}{x^5} + 3\sqrt{x}\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{5}{5x^2+5} + 7^x - \dfrac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\dfrac{5}{\sqrt{3+x^2}} - \dfrac{2x^2+10}{x} + 4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{2}{2x^2+2} + 2^x - \dfrac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\dfrac{2+\sqrt{x}}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}} + 4e^x\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{12}{3+3x^2} - 3\cos x + \dfrac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\dfrac{8}{\sqrt{5+x^2}} + \dfrac{6+x^3}{x^4} - 3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{6}{2x^2+2} - 2\sin x + 3^x\right)dx$

5) $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}} + \dfrac{4x^2-1}{x^3} - 2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{6}{3x^2-9} + \dfrac{3\sin^3 x - 5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\dfrac{3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} - 5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\qquad \int\left(\dfrac{16}{2x^2-8} - \dfrac{3-x^3}{x^4} + 5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\int \sin\frac{x}{2}\,dx$ $\int \frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\int \cos 2x\,dx$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ $\int \sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int \sin(2-3x)dx$ $\int \frac{dx}{e^{3x}}$

Практическая работа №11

Тема: Интегрирование по частям.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенный интеграл методом интегрирования по частям.

Теоретические сведения к практической работе

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int U dV = UV - \int V dU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\, P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$

$\int \arcsin kx\, P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\, P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\dfrac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arctg}\, kx \to dU = \dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\, kx\, P_n(x)dx$	$U = \mathrm{arcctg}\, kx \to dU = -\dfrac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример: Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2xdx;$ *б)* $\int (1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$à)\ \int (3x-1)\sin 2xdx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2xdx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2}) + \int \frac{\cos 2x}{2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

$$б)\ \int (1+2x)\ln xdx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\frac{dx}{x} =$$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Содержание практической работы

Задание: Проинтегрировать по частям.

1) $\int (7x-1)\cos x\,dx$	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$
2) $\int (6-5x)e^x\,dx$	$\int (7x+5)\ln x\,dx$
3) $\int x\cos x\,dx$	$\int \operatorname{arcctg} x\,dx$
4) $\int (1+2x)\cos x\,dx$	$\int \arcsin x\,dx$
5) $\int (8x-1)\sin 5x\,dx$	$\int (6+5x)\ln x\,dx$
6) $\int xe^x\,dx$	$\int (3x+2)\ln x\,dx$

Практическая работа №12

Тема: Вычисление определенного интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять определенные интегралы, используя основные свойства и различные методы интегрирования.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$; 2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

5) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \text{const}$;

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dx, \qquad (2)$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (1) приобретает вид:

$$\int_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V\,dU, \qquad (3)$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

Содержание практической работы

Задание: Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 \left(x^3 + 10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^3 \left(3x^2 + 6x - 2\right)dx$

3) $\int_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$ 4) $\int_0^8 (21x - 19)dx$

5) $\int_{-4}^0 \left(x^3 + 8\right)dx$ 6) $\int_{10}^{13} (2x + 7)dx$

Практическая работа №13

Тема: Применение определенного интеграла для вычисления площади фигур.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления площади фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Площади плоских фигур

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (1)$$

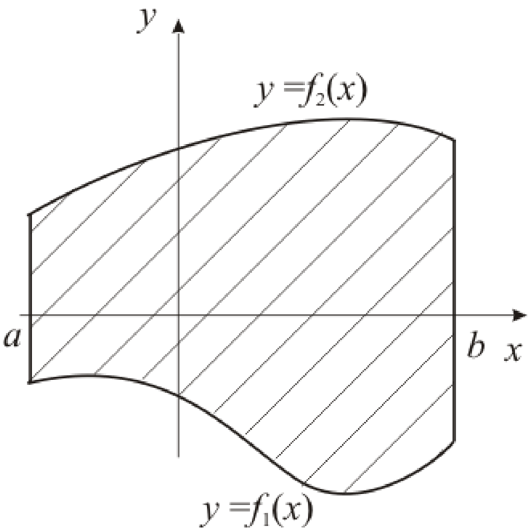


Рис. 1

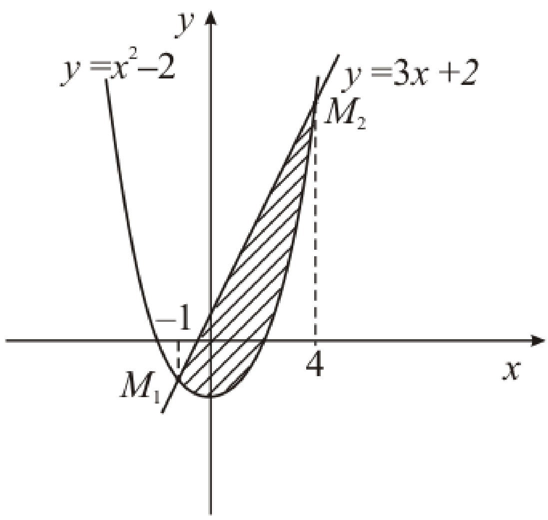


Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 2$, $y = 3x + 2$.

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

X	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
Y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,2)$ и $(-1,-1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$, $y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$. Итак, $M_1(-1,-1)$, $M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (1), в которой $f_2(x) = 3x + 2$, $f_1(x) = x^2 - 2$, поскольку $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [-1,4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4} \left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(3x - x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot (-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6} \text{ (кв.ед.)}$$

2. Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически

Если функции $y = y(t)$ и $x = x(t)$ имеют непрерывные производные первого порядка для всех $t \in [t_0, t_1]$, то площадь плоской фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [t_0, t_1]$, прямыми $x = a$, $x = b$, где $a =$

$x(t_0)$,

$b = x(t_1)$, и осью OX, вычисляется по формуле:

$$S = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)\, x'(t)\, dt \right|. \qquad (2)$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически:

$x = 2\cos t,\ y = 3\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение. Для построения фигуры составим таблицу значений координат (*x*, *y*) точек кривой, соответствующих различным значениям параметра $t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

T	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
X	2	0	–2	0	2
Y	0	3	0	–3	0

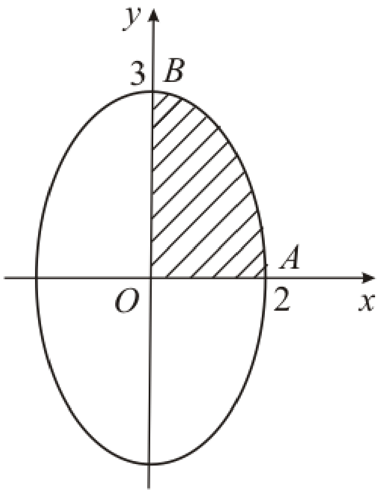


Рис. 3

Нанесем точки (*x*, *y*) на координатную плоскость *XOY* и соединим плавной линией. Когда параметр t изменяется от 0 до 2π, соответствующая точка (x, y) описывает эллипс (известно, что $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ 0 \le t \le 2\pi$ — параметрические формулы, задающие эллипс с полуосями *a* и *b*). Учитывая симметрию фигуры относительно координатных осей *OX* и *OY*, найдем её площадь *S*, умножив на 4 площадь криволинейной трапеции *AOB*. Согласно формуле (2) получим:

$$S = 4\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin t\,(2\cos t)'\, dt \right| = 4\left| -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt \right| = \left\{ \begin{matrix} \text{используем формулу} \\ \text{понижения степени} \\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 4\left| -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt \right| = 4\left| -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\, dt \right| = 4\left| -3\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right| =$$

$$= 4\left| -3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi - \left(0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) \right) \right| = 4\left| -3\frac{\pi}{2} \right| = 6\pi \approx 18{,}850\ (\text{кв. ед.}).$$

Содержание практической работы

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$

2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$

3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$

5) $y = x^2,\ y = 2 - x^2$

6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

Задание 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными параметрически.

1) $x = 2t - t^2,\quad y = t(t-1),\quad 0 \le t \le 1$

2) $x = t^2 - 1,\quad y = t^3 - t,\quad 0 \le t \le 1$

3) $x = 2\sin t,\quad y = \cos t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

4) $x = \ln t,\quad y = (t-1)(3-t),\quad 1 \le t \le 3$

5) $x = 1 - \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

6) $x = \cos t,\quad y = 1 - \sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$

Практическая работа №14

Тема: Вычисления длины дуги.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления длины дуг.

Теоретические сведения к практической работе

Длина дуги плоской кривой

1. Вычисление дуги плоской кривой в декартовых координатах

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную при всех $x \in [a,b]$, то длина дуги $\breve{AB}$ (рис. 4) этой кривой, заключенной между точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, вычисляется по формуле:

$$l_{\breve{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \qquad (1)$$

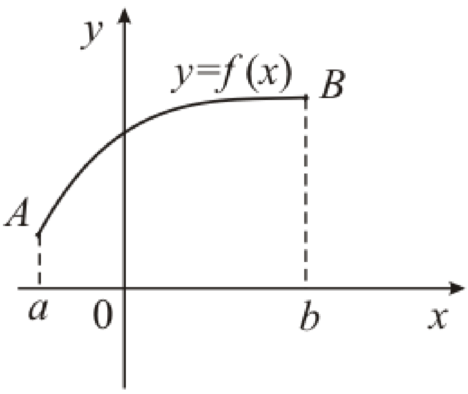


Рис. 4

2. Вычисление длины дуги кривой, заданной параметрически

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t_0 \le t \le t_1$, и функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные 1-го порядка при всех $t \in [t_0, t_1]$, то длина дуги $\breve{AB}$, соответствующей изменению параметра от t_0 до t_1, вычисляется по формуле:

$$l_{\breve{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt. \qquad (2)$$

Пример. Найти длину дуги кривой

а) $y = x^{3/2},\ 0 \le x \le 1;$ б) $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

Решение.

а) Так как кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (1). Найдем y': $\quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ и подставим в (1):

$$l_{\smile AB} = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+\frac{9x}{4}, dt = \frac{9}{4}dx, dx = \frac{4}{9}dt, \\ x = 0 \to t = 1, \\ x = 1 \to t = 1+\frac{9}{4} = \frac{13}{4}. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{9}\int_1^{13/4} t^{\frac{1}{2}}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула } 3 \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{4}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{13/4} = \frac{8}{27}\left.t^{\frac{3}{2}}\right|_1^{13/4} = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) \approx 1{,}440 \ (\text{единиц длины}).$$

б) $x = 2\cos t - \cos 2t, \ y = 2\sin t - \sin 2t, \ 0 \le t \le 2\pi.$

Кривая задана параметрически, поэтому воспользуемся формулой (2). Найдем $x'(t), \ y'(t)$:

$x'(t) = -2\sin t + 2\sin 2t, \ y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t$ и подставим в (2):

$$l_{\smile AB}=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-2\sin t+2\sin 2t\right)^2+\left(2\cos t-2\cos 2t\right)^2}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2 t-8\sin t\sin 2t+4\sin^2 2t+4\cos^2 t-8\cos t\cos 2t+4\cos^2 2t}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)+4\left(\sin^2 2t+\cos^2 2t\right)-8\left(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\right)}\,dt=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем тригонометрические формулы}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\text{ и }\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{matrix}\right\}=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos t}\,dt=$$

$$=\sqrt{8}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулу}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)\Rightarrow\\ \Rightarrow 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\end{matrix}\right\}=2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-8\left(\cos\pi-\cos 0\right)==-8\left(-1-1\right)=16\left(\text{единиц длины}\right).$$

Содержание практической работы

Задание: Найти длину дуги кривой.

1) $y=1+\ln\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{3}$

2) $x=t^2-1,\ y=t^3,\ 0\le t\le 1$

3) $y=x^{\frac{2}{3}}+1,\quad 0\le x\le 1$

4) $x=t^2-1,\quad y=\frac{t}{3}-t^3,\quad 1\le t\le 2$

5) $y=x^{\frac{2}{3}},\ 0\le x\le\frac{1}{2}$

6) $x=t^3-4,\ y=t^2,\ 0\le t\le 2$

Практическая работа №15

Тема: Вычисления объема фигур.

Цель: сформировать умение применять определенный интеграл для вычисления объема фигур.

Теоретические сведения к практической работе

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 1), то его объем вычисляется по формуле:

$$V = \pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx. \qquad (1)$$

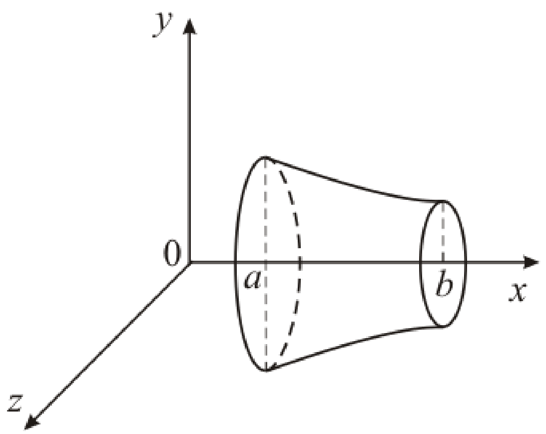


Рис. 1

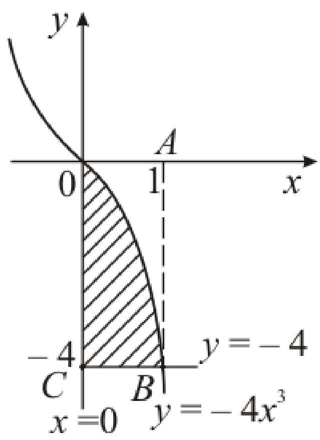


Рис. 2

Пример. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3$, $x = 0$, $y = -4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 2).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры $OABC$, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры OAB. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (1) найдем V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2 dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi \text{ (ед. объема);}$$

$$V_2=\pi\int_0^1\left(-4x^3\right)^2dx=16\pi\int_0^1 x^6dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V=V_1-V_2=16\pi-\frac{16\pi}{7}=\frac{96}{7}\pi\approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Содержание практической работы

Задание: Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2-y=0,\quad y=1$

2) $x^2+y=0,\quad y=-1$

3) $x-y^2=0,\quad x=1$

4) $y=4x^3,\quad x=0,\quad y=-4$

5) $y=4x^3,\quad x=1,\quad y=0$

6) $y=-4x^3,\quad x=-1,\quad y=0$

Практическая работа №16

Тема: Множества и операции над ними.

Цель: сформировать умение выполнять операции с множествами

Теоретические сведения к практической работе

Множество – одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B = \{2,4\}$

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множесву A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

Свойства:

Свойства перестановочности:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Сочетательное свойство:

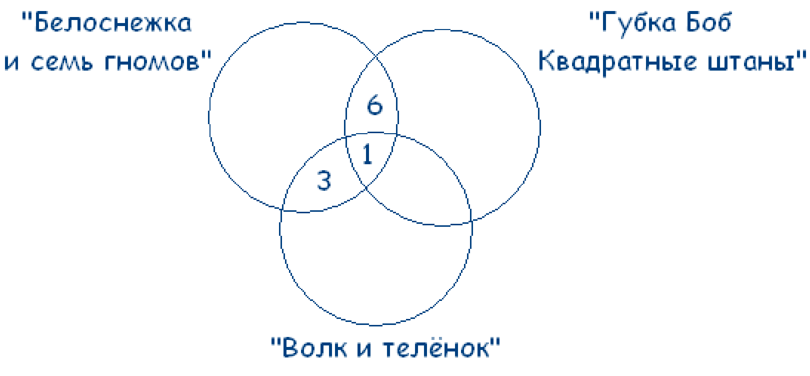
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

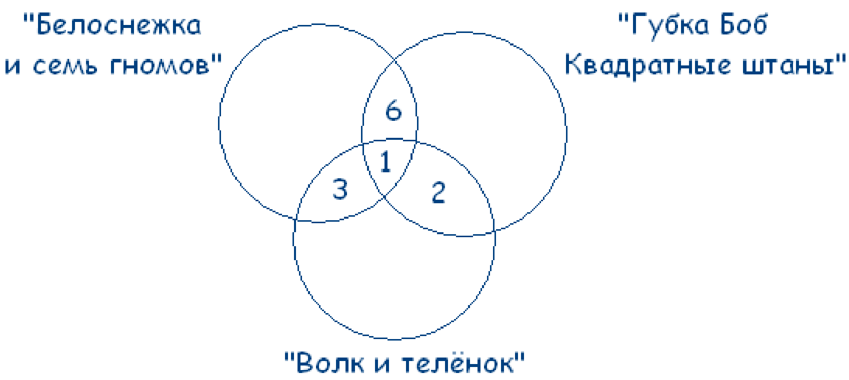
Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

Пример: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

Решение: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



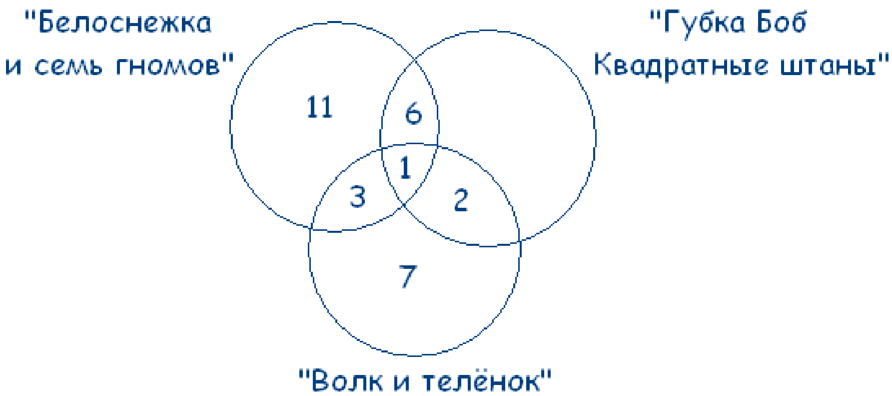
Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».

Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

Содержание практической работы

Задание 1. 1) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={e, o, p, x} B={x, y}

б) A={x: -3<x<4} B={x: 0≤x≤6}

в) A={2^n+1}, B={n+1} nϵN

2) Найти множества A∩B, AUB, A/B, B/A, если:

а) A={12, 13, 14, 15} B={12, 14, 16}

б) $A=\{x: 0<x<2\}$ $B=\{x: 1\leq x\leq 4\}$

в) A={3-(n+1)}, B={n+5} $n \in N$

Задание 2. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

Практическая работа №17

Тема: Элементы теории вероятностей.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события A.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события A заключается между 0 и 1: $0<P(A)<1$.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$
$m_1 = 4$
$p_1 = \frac{4}{10}$
$n_2 = 10$
$m_2 = 3$
$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$$

Содержание практической работы

Задание: Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова

вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Практическая работа №18

Тема: Вычисление полной вероятности.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение полной вероятности.

Теоретические сведения к практической работе

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие A – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$$n = 20 + 30 + 50 = 100$$

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0,5$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) = 0,7$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) = 0,8$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) = 0,9$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) =$$

$$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\,\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$$p(\mathrm{H}_1) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_2) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{H}_3) = \frac{1}{3}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) = \frac{5}{12}$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) = 1$$

$$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) = 0$$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{5}{36} + \frac{1}{3} = \frac{17}{36}$$

Содержание практической работы

Задание: Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?
2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.
3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.
4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?
5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Практическая работа №19

Тема: Формула Бернулли.

Цель: сформировать умение решать задачи с помощью формулы Бернулли.

Теоретические сведения к практической работе

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$p = 0,2$

$n = 6$

$m = 2$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\ 0,2^2(1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - \mathrm{q}^n, q = 1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1 - 0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме

Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(m)$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$$p = 0,7$$
$$n = 5$$
$$2 \le m \le 4$$
$$P_5(2 \le m \le 4) = C_5^2 \cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2} + C_5^3 \cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3} + C_5^4 \cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле
$$np - q \le m_0 \le np + p$$
$$np - (1-p) \le m_0 \le np + p$$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$
$$n = 50$$
$$m_0 - ?$$
$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$
$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \le m_0 \le 50 \cdot 0,05 + 0,05$$
$$1,55 \le m_0 \le 2,55$$
$$m_0 = 2$$

Содержание практической работы

Задание: Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.
7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?
8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?
9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.
10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

Практическая работа №20

Тема: Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Теоретические сведения к практической работе

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина Х – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины Х называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M(X - M(X))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(X) = np \quad D(X) = npq$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(X) = 2\cdot 0,1 + 5\cdot 0,4 + 8\cdot 0,3 + 9\cdot 0,2 = 0,2 + 2 + 2,4 + 1,8 = 6,4$$

$$M(X^2) = 4\cdot 0,1 + 25\cdot 0,4 + 64\cdot 0,3 + 81\cdot 0,2 = 45,8$$

$$D(X) = 45,8 - 6,4^2 = 4,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,84} = 2,2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(X) = 100\cdot 0,05 = 5$$

$$D(X) = 100\cdot 0,05\cdot 0,95 = 4,75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,75} = 2,18$$

Содержание практической работы

Задание: Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Практическая работа №21

Тема: Формула прямоугольников.

Цель: сформировать умение вычислять интегралы по формуле прямоугольников.

Теоретические сведения к практической работе

Пусть требуется найти определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции *f(x).* Если можно найти первообразную *F(x)* функции *f(x)*, то интеграл вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница. Но не всегда первообразная функции выражается через элементарные функции. В этих и других случаях используют приближенные формулы, с помощью которых определенный интеграл находится с любой степенью точности.

Наиболее употребляемая формула – формула прямоугольников.

Метод прямоугольников.

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x).* Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на *n* равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$. В середине $c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ каждого такого отрезка построим ординату $\tilde{y}_i = f(c_i)$ графика функции $y = f(x)$. Приняв эту ординату за высоту построим прямоугольник с площадью $S_i = h \cdot \tilde{y}_i$. Тогда сумма площадей всех *n* прямоугольников (при достаточно большом *n*) дает площадь приближенно равную площади трапеции, т.е.

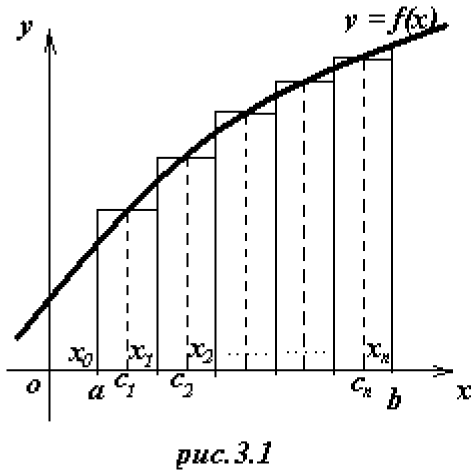


рис.3.1

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h \cdot (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 + ...\tilde{y}_n) = h \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(C_i)$$

т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \pm |R_n(f)|$$ **- формула прямоугольников (1)**

Абсолютная погрешность метода определяется неравенством:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{24n^2} \quad \textbf{(2)}$$

$$\text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right| \quad (3)$$

Пример 1: Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод прямоугольников.

Решение.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right| \Rightarrow \int_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \pm \left|R_n(f)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + \left|R_n(f)\right| = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x4}{2}\right)\right) \pm \left|R_n(f)\right|$$

т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$ и $h = \frac{1}{2}$:

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0 + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_0 + 2\cdot h = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = x_0 + 3\cdot h = 0 + 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = x_0 + 4\cdot h = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2$$

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = f\left(\frac{0+1/2}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f\left(\frac{1/2+1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right) = f\left(\frac{1+3/2}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$$

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) = f\left(\frac{3/2+2}{2}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$$

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{24n^2} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$$

$$f''(x) = 6x,\ M_2 = \max_{[0;\,2]}\left|6x\right| = 12,\ \left|R_4(f)\right| \le \frac{(2-0)^3\cdot 12}{24\cdot 16} = \frac{96}{384} \approx 0{,}25$$

Следовательно: $\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right) \pm 0{,}25 \approx 3{,}875 \pm 0{,}25$

Пример 2: Зная, что погрешность метода прямоугольников при вычислении интеграла $\int_0^2 x^3dx$ составляет 0,125, определить число разбиений *n*.

Решение. Используя формулу **(2)** получим $0,125 \le \frac{2^3 \cdot 12}{24 \cdot n^2}$

Умножим правую и левую части неравенства на дробь $\frac{n^2}{0,125}$, тогда $n^2 \le \frac{96}{24 \cdot 0,125} = \frac{96}{3} = 32$.

т.е $n \le \sqrt{32}$ или $n \le 5$

Содержание практической работы

По формуле прямоугольников вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x}dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

(Ответ: $I \approx 1,20 \pm 0,025$*)*

Практическая работа №22

Тема: Вычисление интегралов методом трапеций.

Цель: сформировать умение вычислять интегралы по формуле трапеций.

Теоретические сведения к практической работе

Метод трапеций.

Формулу трапеций получают аналогично формуле прямоугольников: на каждом частичном отрезке криволинейная трапеция заменяется обычной.

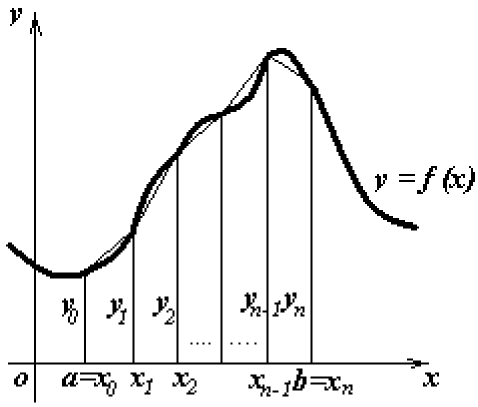


рис 3.2

Пусть на отрезке [a ; b], где a < b, задана непрерывная функция *f(x).* Требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, численно равный площади соответствующей криволинейной трапеции. Разобьем основание этой трапеции на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$. тогда $x_i = x_0 + hi$, $y_i = f(x_i)$.

Так как площадь криволинейной трапеции приблизительно равна сумме площадей трапеций S_i, высота каждой из которых равна h, то:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n = h\cdot\frac{y_0+y_1}{2} + h\cdot\frac{y_1+y_2}{2} + ... + h\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2} =$$

$$= h\cdot\left(\frac{y_0+2y_1+2y_2+.......+2y_{i-1}+2y_i+.......2y_{n-1}+y_n}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+......+y_{n-1}\right)$$

Абсолютная погрешность метода (аналогично методу прямоугольников) составляет:

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12n^2} \qquad \text{где} \qquad M_2 = \max_{[a;\,b]}|f''(x)|$$

(4)

тогда $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+......+y_{n-1}\right) \pm |R_n(f)|$ - **формула трапеций.**

(5)

Пример : Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3dx$ при $n = 4$, используя метод трапеций.

Решение. По формуле трапеций:

$$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{2-0}{4}\cdot\left(\frac{y_0+y_4}{2}+y_1+y_2+y_3\right)\pm\left|R_n(f)\right|,$$ т.к. $x_i = x_0 + i\cdot h$, $h=\frac{1}{2}$, то

$x_0 = 0$, $x_1 = x_0 + 1\cdot h = 0+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $x_2 = x_0+2\cdot h = 0+2\cdot\frac{1}{2}=1$, $x_3 = x_0+3\cdot h = 0+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $x_4 = x_0+4\cdot h = 0+4\cdot\frac{1}{2}=2$.

Тогда $y_0 = f(0) = 0^3 = 0$, $y_1 = f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$, $y_2 = f(1) = 1^3 = 1$, $y_3 = f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}$, $y_4 = f(2) = 2^3 = 8$.

Найдем погрешность:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12n^2}$$ где $M_2 = \max\limits_{[a;\,b]}\left|f''(x)\right|$

$f''(x) = 6x$, $M_2 = \max\limits_{[0;\,2]}|6x| = 12$, $\left|R_4(f)\right| \le \frac{(2-0)^3\cdot 12}{12\cdot 16}=\frac{1}{2}=0{,}5$

Следовательно

$$\int_0^2 x^3dx \approx \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{0+8}{2}+\frac{1}{8}+1+\frac{27}{8}\right)\pm 0{,}5 = 4{,}25\pm 0{,}5$$

Содержание практической работы

1. По формуле трапеций вычислить $I=\int_1^2\sqrt{x}dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

(Ответ: $I\approx 1{,}218\pm 0{,}002$)

2. По формуле трапеций вычислить $I=\int_1^2\sqrt{x}dx$, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

(Ответ: $I\approx 1{,}218\pm 0{,}002$)

3. По формуле трапеций вычислить $I=\int_0^1 e^{-x^2}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: $n = 4$, $I\approx 0{,}75\pm 0{,}01$)

4. По формуле трапеций вычислить $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: $n = 6$, $I\approx 0{,}67\pm 0{,}01$)

Практическая работа №23

Тема: Формула Симпсона.

Цель: сформировать умение вычислять интегралы по формуле Симпсона.

Теоретические сведения к практической работе

Если заменить график функции на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу приближенного значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$.

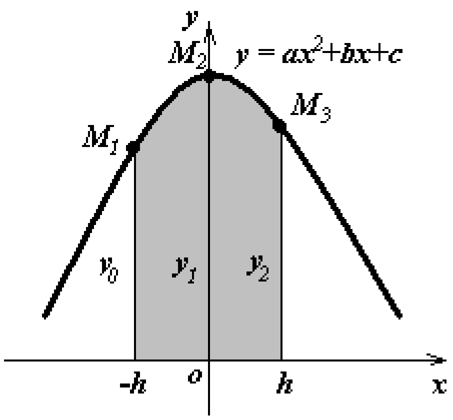


рис 3.3

Предварительно найдем вспомогательную площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой $y = ax^2 + bx + c$, прямыми $x = -h$, $x = h$ и отрезком $[-h;\ h]$.

Пусть парабола проходит через точки $M_1(-h; y_0)$,

$M_2(0; y_1)$ и $M_3(h;\ y_2)$.

$$\begin{cases} y_0 = a(-h)^2 + b(-h) + c = ah^2 - bh + c \\ y_1 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c \\ y_2 = ah^2 + bh + c \end{cases}$$

(6)

тогда полученная площадь:

$$S = \int_{-h}^{h}(ax^2 + bx + c)dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\Big|_{-h}^{h}$$

$$= a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch - \left(a\frac{(-h)^3}{3} + b\frac{(-h)^2}{2} + c(-h)\right) = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch \quad \textbf{(1)}$$

Выразим полученное значение через y_0, y_1 и y_2. Используя формулы (6) получим $c = y_1$, $a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)$. Подставляя полученные значения в (7) получим:

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad \textbf{(2)}$$

Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная функциями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

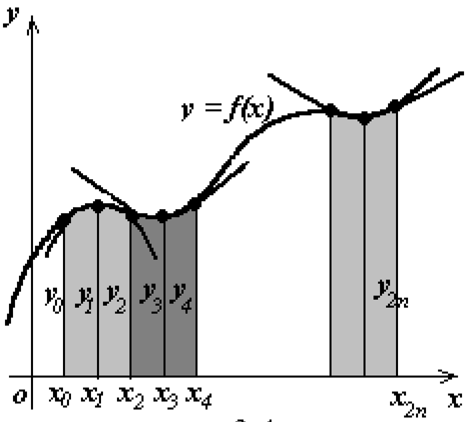


рис 3.4

1. Разобьем отрезок [a ; b] на $2n$ равных частей. Получим отрезки длиной $h = \frac{b-a}{2n}$ **(3)**
2. В точках деления вычислим значения функции

$y = f(x)$: y_0, y_1, y_2, ……, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.

3. Заменим каждую пару соседних криволинейных трапеций параболическими трапециями с основаниями, равными $2h$.

На отрезке $[x_0;\ x_2]$ парабола проходит через точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.

Используя формулу (1) получим $S_1 = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$

Аналогично на отрезке $[x_2;\ x_4]$: $S_2 = \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$ и т. д. до

$$S_n = \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Следовательно:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = S_1 + S_2 + ... + S_n = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + ... + \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right) =$$

$$= \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n}\right)\right]$$

Учитывая погрешность вычислений $|R_n|$ и $h = \frac{b-a}{2n}$, получим формулу Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n}\right)\right] \pm |R_n|$$

(4)

Абсолютная погрешность метода оценивается соотношением:

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} \quad \text{где } M_2 = \max_{[a;b]}\left|f^{IV}(x)\right|$$

(5)

Пример :

Вычислить интеграл $\int_0^2 x^3 dx$, используя метод парабол при $n = 4$.

Решение.

Количество разбиений $2n = 8$, $h = \frac{2-0}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$, $f(x) = x^3$

Составим таблицу:

X	***y₀ , y₈***	***y**четное*	***y**нечетное*
$x_0 = 0$	$y_0 = f(0) = 0^3 = 0$		
$x_1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$			$y_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
$x_2 = 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$		$y_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	
$x_3 = 0 + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$			$y_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$
$x_4 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$		$y_4 = f(1) = 1^3 = 1$	
$x_5 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$			$y_5 = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$
$x_6 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$		$y_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	
$x_7 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$			$y_7 = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{343}{64}$
$x_8 = 2$	$y_8 = f(2) = 2^3 = 8$		

Рассмотрим погрешность метода:

$\left|R_n(f)\right| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} = 0$ (Доказать самостоятельно).

По формуле Симпсона получаем:

$$\int_0^2 x^3 dx = \frac{2-0}{6\cdot 4}\left[(0+8)+4\left(\frac{1}{64}+\frac{27}{64}+\frac{125}{64}+\frac{343}{64}\right)+2\left(\frac{1}{8}+\frac{8}{8}+\frac{27}{8}\right)\right]\pm 0=\frac{48}{12}=4$$

Содержание практической работы

1.По формуле Симпсона вычислить $I=\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$, с точностью до 0,001

(Ответ: $I \approx 1{,}148 \pm 0{,}001$*)*

2.По формуле Симпсона вычислить $I=\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$, с точностью до 0,0001

(Ответ: n = 10, $I \approx 0{,}50001 \pm 0{,}0001$*)*

3.По формуле Симпсона вычислить $I=\int_1^2 \frac{dx}{x}$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 5, $I \approx 0{,}69 \pm 0{,}01$*)*

4.По формуле Симпсона вычислить $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$, с точностью до 0,01

(Ответ: n = 4, $I \approx 0{,}24 \pm 0{,}01$*)*

Практическая работа №24

Тема: Интерполирование функций.

Цель: сформировать умение применять формулы интерполирования функции при решении задач.

Интерполяционный полином Лагранжа.

Пусть дана таблица значений

x	x_1	x_2	x_3	…………	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…………	y_n

Требуется составить полином (функцию) $y = f(x)$ степени $m \le n-1$, который принимал бы заданные значения y_i при соответствующих значениях x_i : $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n)$. Иными словами график функции должен проходить через заданные точки $M(x_i; y_i)$

Данная задача выполнима при использовании интерполяционного полинома Лагранжа:

$$f(x) = \frac{y_1\varphi(x)}{(x-x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3).......(x_1-x_n)} +$$

$$\frac{y_2\varphi(x)}{(x-x_2)(x_2-x_1)(x_2-x_3).......(x_2-x_n)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{y_n\varphi(x)}{(x-x_n)(x_n-x_1)(x_n-x_2).......(x_n-x_{n-1})} \qquad \textbf{(1)}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k\varphi(x)}{\varphi'(x_k)(x-x_k)} \qquad \textbf{(2)}$$

где $\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)........(x-x_n)$ - вспомогательная функция n-й степени, в которой x_i – заданные табличные значения аргумента.

Пример 1: Составить полином Лагранжа, удовлетворяющий таблице значений

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

Решение. Вспомогательная функция $\varphi(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Вычислим $\varphi'(x)$ последовательно при данных значениях x:

$\varphi'(x)$ = (x - 2)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 3)(x - 4)+(x - 1)(x - 2)(x - 4)+(x - 1)(x - 2)(x - 3);

$\varphi'(1) = -6$, $\varphi'(2) = 2$, $\varphi'(3) = -2$, $\varphi'(4) = 6$.

Тогда по формуле (1)

$$f(x) = \frac{2}{-6}(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{3}{2}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{4}{-2}(x-1)(x-2)(x-4) + \frac{5}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$== x + 1$

Таким образом, в данном случае в качестве интерполяционного полинома найдена линейная функция $f(x) = x + 1$.

Интерполяционная формула Ньютона.

Пусть $y_0, y_1, y_2, \ldots$ – значения некоторой функции $y = f(x)$, соответствующие <u>равноотстоящим</u> значениям аргументам $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta x = const$).

Введем обозначения:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, ... , $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ - разности первого порядка данной функции;

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$, ... – разности второго порядка

....

$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0$, $\Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1$, ... – разности (n+1) - го порядка

Производя последовательные подстановки, получим:

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$, $\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$, ... $\Delta^n y_0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \cdot y_{n-k}$

Подобным же образом получаем:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$, $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$, ...

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k y_0 = (1+\Delta)^n \cdot y_0 = y_0 + n\Delta y_n + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 \qquad (3)$$

Запишем таблицу разностей:

x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

……………………………………………

Если в формуле (3) положить, что n – не только целое и положительное число, а может быть любым $n = t$, то получим интерполяционную формулу Ньютона

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + ... + \Delta^r y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Мы получили такую функцию от t, которая обращается при $t = 0$ в y_0, при $t = 1$ в y_1, при $t = 2$ в y_2 и т. д. Поскольку последующее значение аргумента x при постоянном шаге h определяется формулой $x_n = x_0 + nh$, то $n = \frac{x_n - x_0}{h}$. Тогда, полагая $x = x_0 + th$, $t = \frac{x - x_0}{h}$ приведем формулу (3) к виду

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 + ... \qquad \textbf{(3}^*\textbf{)}$$

Пример 2: Из таблицы

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

Найти значение y при $x = 3{,}1$, пользуясь интерполяционной формулой Ньютона.

Решение. Составим таблицу разностей:

x	**y**	**Δy**	**Δ² y**	**Δ³ y**
1	**3**			
		4		
2	**7**		2	
		6		0
3	**13**		2	
		8		0
4	**21**		2	
		10		0
5	**31**		2	
		12		0
6	**43**		2	
		14		
7	**57**			

Здесь $x_0 = 3$, $x = 3{,}1$, $h = 1$. Тогда $t = \frac{x - x_0}{h} = \frac{3{,}1 - 3}{1} = 0{,}1$

Интерполяционная формула Ньютона (4) для этого случая: $y = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$

Следовательно $y = 13 + 0{,}1 \cdot 8 + \frac{0{,}1(0{,}1-1)}{2} \cdot 2 = 13{,}71$, т.е. при $x = 3{,}1$ $y = 13{,}71$

Интерполяционная функция Ньютона (3^*) $y = 3 + (x-1) \cdot 4 + \frac{(x-1)(x-2)}{2} 2 = x^2 + x + 1$

Содержание практической работы

1. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, найти уравнение параболы проходящей через точки (2; 0), (4; 3), (6; 5), (8; 4), (10; 1).

(Ответ: $y = \frac{1}{32}(x^4 - 26x^3 + 220x^2 - 664x + 640)$*)*

2. Даны точки (0; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7). Используя интерполяционную формулу Лагранжа, составить уравнение функции, принимающей указанные значения при заданных значениях аргумента.

(Ответ: $y = -\frac{1}{3}(- 2x^3 - 15x^2 + 25x - 9)$*)*

3. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, принимающую значения заданные таблицей.

x	1	3	4	6
y	-7	5	8	14

(Ответ: $y = \frac{1}{5}(x^3 - 13x^2 + 69x - 92)$*)*

4. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, построить функцию, график которой проходит через точки (2; 3), (4; 7), (5; 9), (10; 19).

(Ответ: $y = 2x - 1$*)*

5. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $y = f(x)$, если известны ее значения $f(1) = 6$, $f(3) = 24$, $f(4) = 45$.

(Ответ: $y = 4x^2 - 7x + 9$*)*

6. Найти интерполяционный полином Ньютона для функции $f(x) = 2^x$ и ее значениям в точках $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ и вычислить $f(-0{,}5)$ и $f(2{,}5)$.

(Ответ: $y = 8 + 4(x - 3) + (x - 3)(x - 2) + \frac{1}{6}(x - 3)(x - 2)(x - 1) + \frac{1}{48}(x - 3)(x - 2)(x - 1)x$,
$f(-0{,}5) = 0{,}700$, $f(2{,}5) = 5{,}658$.*)*

Практическая работа №25

Тема: Приближенное решение дифференциальных уравнений.

Цель: сформировать умение вычислять дифференциальные уравнения методом Эйлера и Рунге-Кутта.

Теоретические сведения к практической работе

Метод Эйлера.

Пусть требуется решить **задачу Коши**: найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y) \qquad \textbf{(1)}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

При численном решении дифференциального уравнения (1) задача ставится следующим образом: в точках x_0, x_0, x_1, x_2 ,...., x_n найти приближения y_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$для значений точного решения $y(x_к)$

Разность $\Delta x_к = x_{к-1} - x_к$ называется **шагом сетки**. Во многих случаях величину $\Delta x_к$ принимают постоянной. Пусть $\Delta x_к = h$, тогда

$$x_k = x_0 + kh \text{ где } \left(k = \overline{1,n}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Метод Эйлера основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x;y) \text{, где } \Delta y = y(x+h) - y(x),\ \Delta x = (x+h) - x = h \qquad \textbf{(3)}$$

Приближенное значение $y_к$ в точке $x_k = x_0 + kh$ вычисляется по формуле:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k; y_k) \text{ - } \textbf{формула Эйлера} \qquad \textbf{(4)}$$

Пример 1: Методом Эйлера найти значения решения уравнения $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - y$, для которого $y(1) = 1$, в пяти точках отрезка [$1; 1,5$], приняв $h = 0,1$

Решение. По формуле (2) находим точки $x_0 = 1$, $x_1 = 1,1$, $x_2 = 1,2$, $x_3 = 1,3$, $x_4 = 1,4$, $x_5 = 1,5$. Значения искомой функции $y = y(x)$, удовлетворяющей условиям данной задачи Коши, вычисляем по формуле (4). Результаты вычислений занесем в таблицу.

k	x_k	y_k	$2x_k$	$f(x_k, y_k) = 2x_k - y_k$	$hf(x_k, y_k) = 0{,}1(2x_k - y_k)$	$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
0	*1,0*	*1,0000*	*2,0*	*1,0000*	*0,1000*	*1,1000*
1	*1,1*	*1,1000*	*2,2*	*1,1000*	*0,1100*	*1,2100*
2	*1,2*	*1,2100*	*2,4*	*1,1900*	*0,1190*	*1,3290*
3	*1,3*	*1,3290*	*2,6*	*1,2710*	*0,1271*	*1,4561*
4	*1,4*	*1,4561*	*2,8*	*1,3439*	*0,1344*	*1,5905*
5	*1,5*	*1,5905*	*3,0*	*1,4095*	*0,1410*	*1,7315*

Метод Рунге – Кутта. (Один из наиболее употребляемых методов повышенной точности).

Пусть функция y определяется дифференциальным уравнением $y' = f(x; y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. При численном интегрировании такого уравнения по методу Рунге – Кутта определяются четыре числа:

$$\begin{cases} k_1 = h \cdot f(x; y) \\ k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}; y + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}; y + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = h \cdot f(x + h; y + k_3) \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Если положить $y(x+h) = y(x) + \Delta y$, то можно доказать, что

$$\Delta y \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Получаем следующую схему вычислений:

x	Y	k_i	Δy
x_0	y_0	k_1	
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	k_2	$\Delta y_0 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	k_3	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	k_4	
x_1	$y_1 = y_0 + \Delta y_0$	k_1	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_1 + \frac{h}{2}$	$y_1 + \frac{k_1}{2}$	k_2	

$x_1+\dfrac{h}{2}$ x_1+h	$y_1+\dfrac{k_2}{2}$ y_1+k_3	k_3 k_4	
x_2 $x_2+\dfrac{h}{2}$ $x_2+\dfrac{h}{2}$ x_2+h	$y_2=y_1+\Delta y_1$ $y_2+\dfrac{k_1}{2}$ $y_2+\dfrac{k_2}{2}$ y_2+k_3	k_1 k_2 k_3 k_4	$\Delta y_2\approx\dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)$
....	....	....	....

Пример 2:

Составь таблицу значений функции y, определяемой уравнением $y'=y-\dfrac{2x}{y}$, при начальном условии $y(0)=1,\ 0\le x\le 1$ при $h=0{,}2$.

Решение.

Используя формулы (5) найдем числа:

$$
\begin{cases}
k_1=h\cdot f(x;\,y)=0{,}2\cdot\left(1-\dfrac{2\cdot 0}{1}\right)=0{,}2\\
k_2=h\cdot f\left(x+\dfrac{h}{2};\,y+\dfrac{k_1}{2}\right)=0{,}2\cdot f\left(0{,}1;\,1{,}1\right)=0{,}2\cdot\left(1{,}1-\dfrac{0{,}2}{1{,}1}\right)=0{,}1836\\
k_3=h\cdot f\left(x+\dfrac{h}{2};\,y+\dfrac{k_2}{2}\right)=0{,}2\cdot f\left(0{,}1;\,1{,}0918\right)=0{,}1817\\
k_4=h\cdot f\left(x+h;\,y+k_3\right)=0{,}2\cdot f\left(0{,}2;\,1{,}1817\right)=0{,}1686
\end{cases}
$$

Отсюда $\Delta y_0\approx\dfrac{1}{6}\left(0{,}2+0{,}3672+0{,}3634+0{,}1686\right)=0{,}1832.$

Таким образом $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ при $x = 0{,}2$. По этой же схеме находим y_2 и т.д. процесс вычисления ведем по схеме:

x	***Y***	$\boldsymbol{k_i}$	$\boldsymbol{\Delta y}$
$x_0=0$ $x_0+\dfrac{h}{2}=0{,}1$ $x_0+\dfrac{h}{2}=0{,}1$ $x_0+h=0{,}2$	$y_0=1$ $y_0+\dfrac{k_1}{2}=1{,}1$ $y_0+\dfrac{k_2}{2}\ 1{,}0918$ $y_0+k_3=1{,}1817$	$k_1=0{,}2$ $k_2=0{,}1838$ $k_3=0{,}1817$ $k_4=0{,}1686$	$\Delta y_0\approx\dfrac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)$ $=0{,}1832$

$x_1 = 0,2$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0,3$ $x_1 + \frac{h}{2} = 0,3$ $x_1 + h = 0,4$	$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1,1832$ $y_1 + \frac{k_1}{2} = 1,2677$ $y_1 + \frac{k_2}{2} = 1,2626$ $y_1 + k_3 = 1,3407$	$k_1 = 0,1690$ $k_2 = 0,1589$ $k_3 = 0,1575$ $k_4 = 0,1488$	$\Delta y_1 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ $= 1,1584$
x_2	$y_2 = y_1 + \Delta y_1$	k_1	$\Delta y_2 \approx \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
....	....	....	....

Содержание практической работы

1. Найти по методу Эйлера четыре значения функции *y*, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$.

Ответ:

x	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
y	*1*	*1,1*	*1,22*	*1,36*	*1,52*

2. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $y' = y - x^2$ на промежутке [1; 2], при начальном условии $y(1) = 0$, принимая $h = 0,1$. В первых пяти точках.

Ответ:

X	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*
У	*-0,1158*	*-0,1501*	*-0,1925*	*-0,2397*	*-0,2944*

3. По методу Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение $4y' = y^2 + 4x^2$ на промежутке [0; 1], при начальном условии $y(0) = 1$, принимая $h = 0,1$. Вычисление вести с тремя верными знаками.

Ответ:

X	*0*	*0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
У	*-1*	*-0,975*	*-0,949*	*-0,921*	*-0,888*	*-0,842*	*-0,802*	*-0,744*	*-0,675*	*-0,593*	*-0,495*

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
2. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М: Издательский центр «Академия», 2011
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2010
4. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2012

Дополнительные источники

1. Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2011
2. Математика и информатика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / Виноградов Ю.Н., Гомола А.И., Потапов В.И., Соколова Е.В./ - М.: Издательский центр «Академия», 2012
3. Математика для профессий и специальностей социально-экономического профиля: учебник для образовательных учреждений нач. и сред. образования / В.А. Гусев, С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
4. Спирина М.С. дискретная математика: учеб. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
5. Омельченко В.П. Математика. – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2012